Dinámica

Movimiento Armónico Simple (MAS)

Movimiento armónico simple

- Es un movimiento periódico
- El objeto oscila alrededor de una posición de equilibrio
- **<u>Característica</u>**: al plantear las ecuaciones de movimiento (2° principio de Newton) se obtiene una ecuación diferencial de orden 2

$$-Cx = a_x$$

Si consideramos que la posición de equilibrio es $x_{EQ} = 0$

Movimiento armónico simple

$$-Cx = a_x$$

¿Cómo resolver esta ecuación diferencial? La aceleración es la derivada segunda de la posición respecto del tiempo

$$-Cx = \frac{d^2x}{dt^2}$$

¿Qué función x(t) al ser derivada dos veces es igual a original con diferencia de una constante?

Movimiento armónico simple

$$-Cx = \frac{d^2x}{dt^2}$$

¿Qué función x(t) al ser derivada dos veces es igual a original con diferencia de una constante?

$$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi)$$

Se podría proponer un coseno (o una combinación de senos y cosenos)

$$x(t) = e^{\omega \cdot t + \varphi}$$

No analizaremos esta opción pero es equivalente

Movimiento armónico simple

$$-Cx = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si se propone como solución:

$$x = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi) = -\omega^2 \cdot x$$

Reemplazando en la ecuación

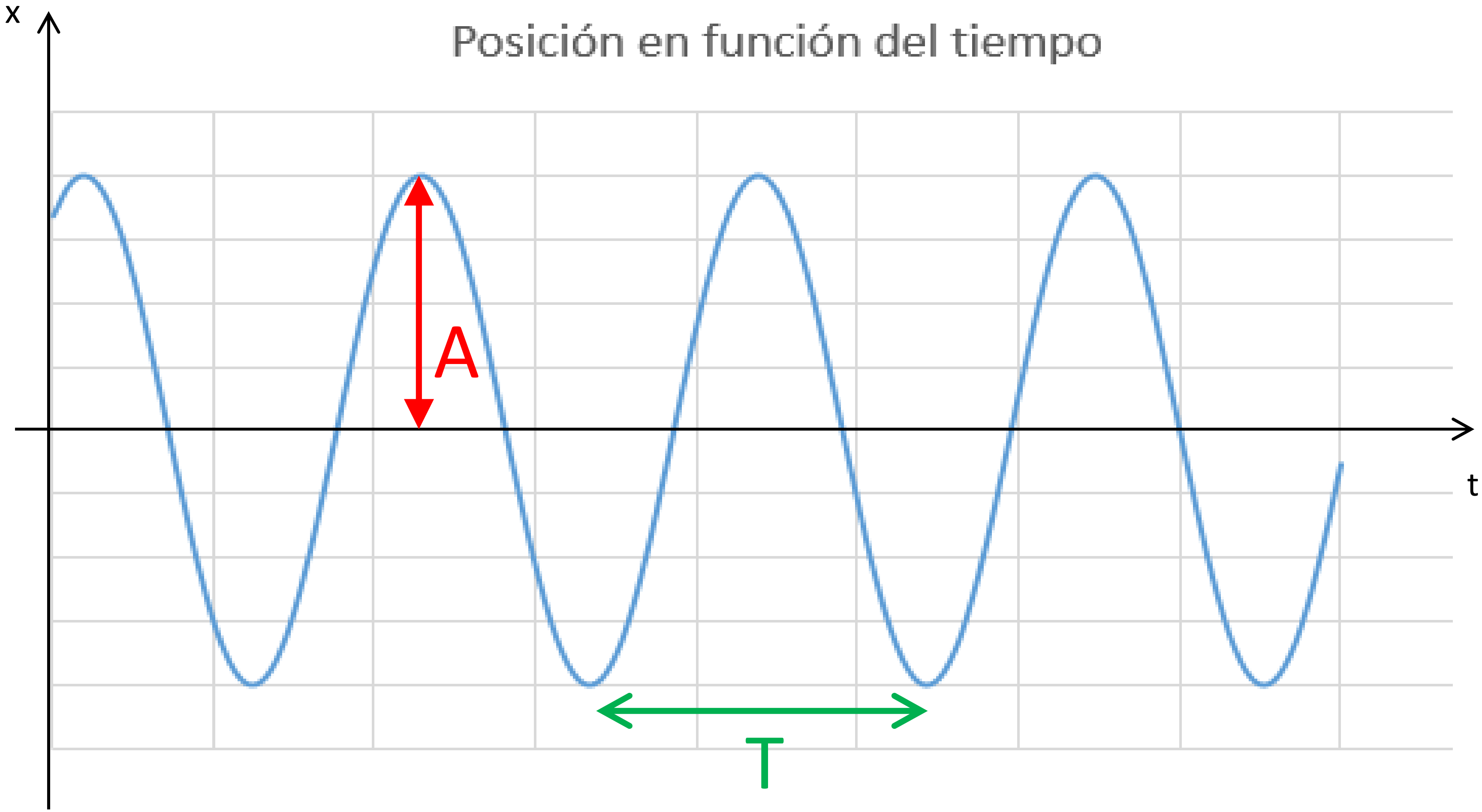
$$-Cx = -\omega^2 \cdot x$$

Esto ocurre sólo si se cumple que

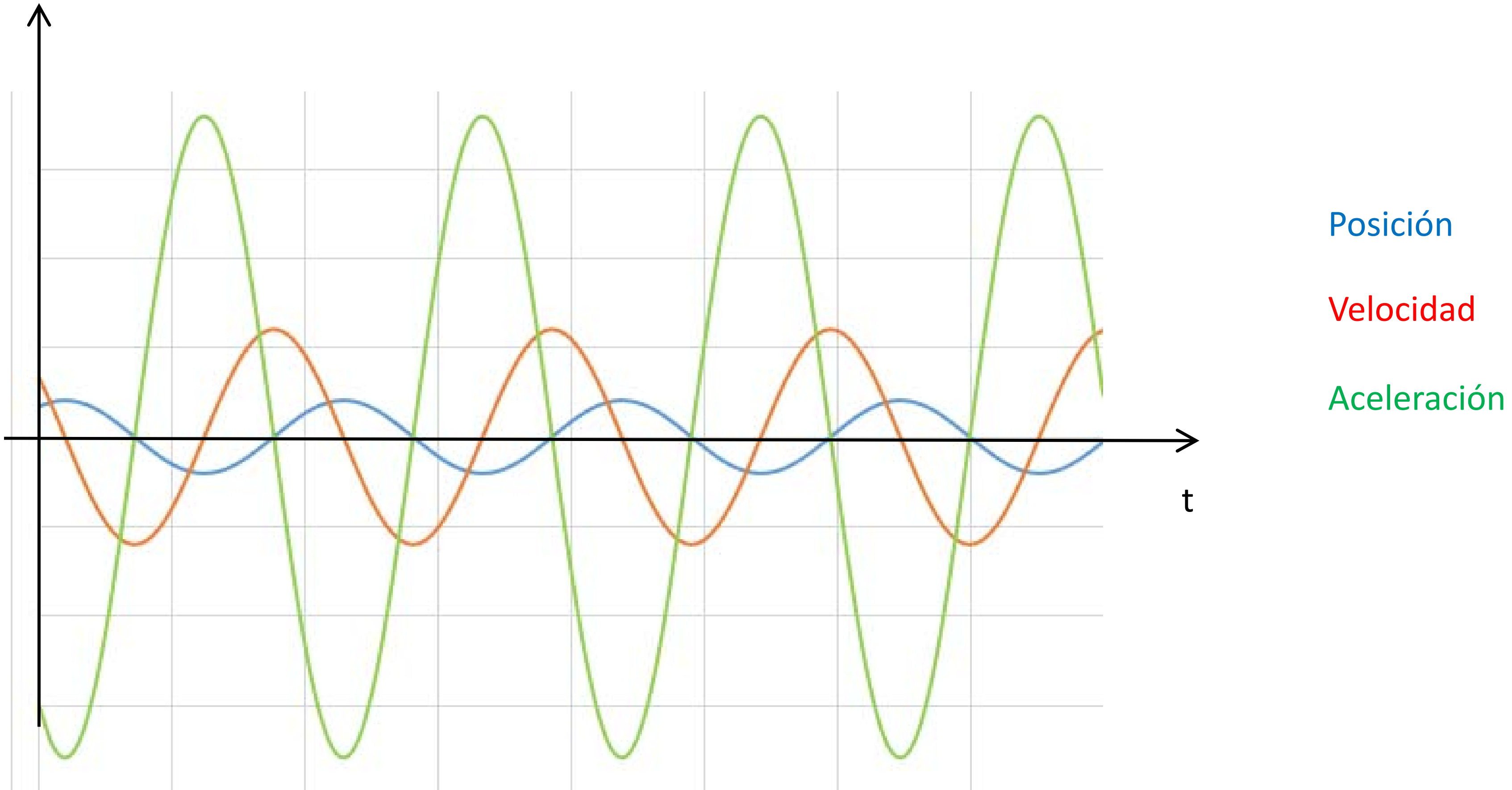
$$\sqrt{C} = \omega$$

El valor de A y φ dependen de las condiciones iniciales. Y $\sqrt{C} = \omega$

Analicemos la posición en el tiempo

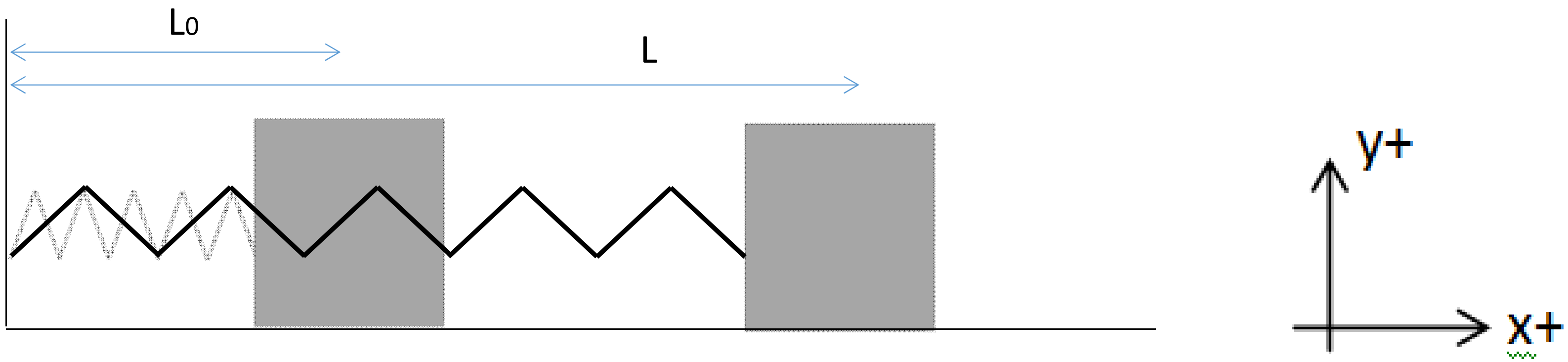


Analicemos las variables cinemáticas en el tiempo



Fuerza elástica

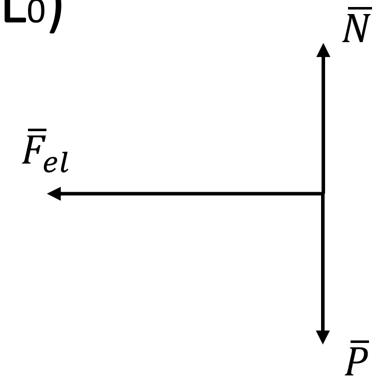
- Un objeto de masa m está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento y está unido a un resorte (constante elástica K). El otro extremo del resorte está fijo. En esas condiciones, se estira el resorte una distancia d respecto de su longitud natural (L_0) y se lo suelta. Expresar:
  - La posición en función en función del tiempo.
  - El período de oscilación

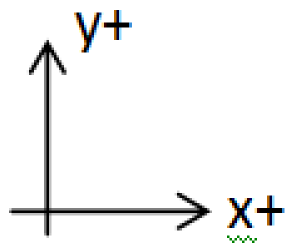


- Según la ley de Hooke $\bar{F}_{el} = -K(\mathrm{L} - L_0)\breve{\imath}$

Fuerza elástica

- DCL (consideramos el origen en L_0)





Si consideramos que el origen de coordenadas está en L_0, la fuerza expresión de la fuerza elástica es

$$\bar{F}_{el} = -K \cdot x\breve{\imath}$$

Ecuación de movimiento $\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}$

$$\breve{\imath})\ -Kx = m \cdot a_x$$

$$-\frac{K}{m}x = a_x$$

Ecuación diferencial de orden 2 donde

$$\omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Fuerza elástica

- Encontramos la ecuación diferencial de orden 2 (donde $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$). Entonces la solución es:

$$x(t) = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$

- Considerando las condiciones iniciales:

  - $x(t = 0s) = A \cdot sen(\varphi) = d$

  - $v_x = \frac{dx}{dt} = A \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \varphi\right) \rightarrow v_x(t = 0s) = A \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot cos(\varphi) = 0$

Fuerza elástica

- Considerando las condiciones iniciales:
  - $v_x(t = 0s) = A \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot cos(\varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad$ ó $\quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$ (ésta opción se descarta)
  - $x(t = 0s) = A \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = d \quad \rightarrow \quad d = A$
- En función de los datos, la posición en función del tiempo es:

$$\bar{r}(t) = d \cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\breve{\imath}$$

Fuerza elástica

- Considerando que:

$$\bar{r}(t) = d \cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\breve{\imath}$$

La frecuencia de pulsación es:

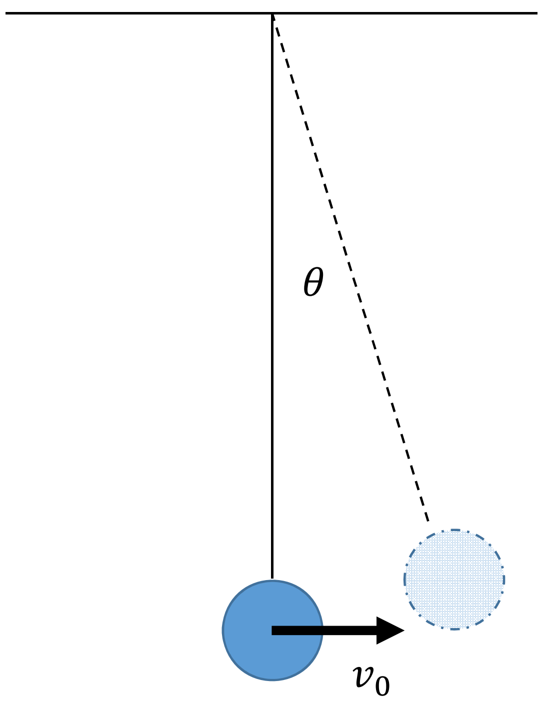
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Y el período es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$$

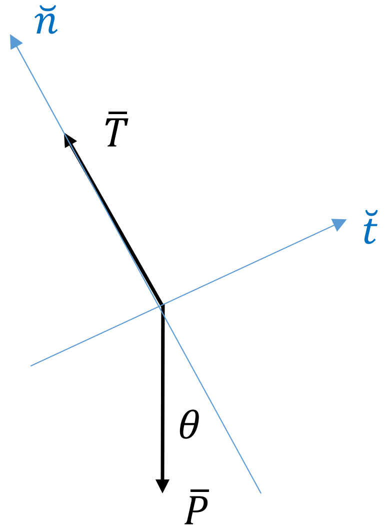
Péndulo simple

- Una masa m está sostenida por una soga ideal de longitud L (en uno de sus extremos, el otro extremo está fijo). Cuando está en equilibrio, se golpea de forma tal que la masa adquiere una rapidez v_0y la masa realiza pequeñas oscilaciones. Expresar:
  - El ángulo de inclinación (θ)en función del tiempo
  - La velocidad angular en función del tiempo
  - El período de oscilación



Péndulo simple

- DCL (considerando un θ genérico)



Ecuación de movimiento $\sum \bar{F} = m \cdot \bar{a}$

$$\breve{t}) \; -m \cdot g \cdot sen(\theta) = m \cdot a_t$$

$$\breve{n}) \; T - m \cdot g \cdot cos\,(\theta) = m \cdot a_n$$

Péndulo simple

Ecuación de movimiento

$$\breve{t}) - m \cdot g \cdot sen(\theta) = m \cdot a_t$$

Si consideramos pequeñas oscilaciones $\theta \ll \rightarrow sen(\theta) = \theta$. Entonces

$$-\cancel{m} \cdot g \cdot \theta = \cancel{m} \cdot a_t$$

Considerando que la aceleración tangencial es $a_t = \frac{d|\bar{v}|}{dt}$

y que $|\bar{v}| = \frac{ds}{dt} = \frac{d(L \cdot \theta)}{dt} = L \cdot \frac{d\theta}{dt}$,

$\boxed{\text{Notación: } |\bar{v}| = v}$

entonces $a_t = L \cdot \frac{d\theta^2}{dt^2}$

Reemplazando esto se obtiene que:

$$-\frac{g}{L} \cdot \theta = \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$\boxed{\text{Ecuación diferencial de orden 2 donde } \omega = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{g}{L}}}$

Péndulo simple

- Encontramos la ecuación diferencial de orden 2 (donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$). Entonces la solución es:

$$\theta(t) = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + \varphi\right)$$

- Considerando las condiciones iniciales:
  - $\theta(t = 0s) = A \cdot sen(\varphi) = 0$
  - $\Omega = \frac{d\theta}{dt} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + \varphi\right) \to \Omega(t = 0s) = A \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot cos(\varphi) = \frac{v_0}{L}$

Péndulo simple

- Considerando las condiciones iniciales:

  - $\theta(t = 0s) = A \cdot sen(\varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0 \;\; \text{ó} \;\; \varphi = \pi$ (esta opción queda descartada)

  - $\Omega = \frac{d\theta}{dt} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot cos(\varphi) \rightarrow \Omega(t = 0s) = A \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{v_0}{L}$

$$A = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}}$$

  - El ángulo de inclinación respecto de la vertical en función del tiempo es

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

Péndulo simple

El ángulo de inclinación respecto de la vertical en función del tiempo es

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

Y la velocidad angular es

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{L} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

Péndulo simple

- Considerando que:

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

La frecuencia de pulsación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Y el período es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Péndulo simple

- Entonces:

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{L \cdot g}} \cdot sen\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{L} \cdot cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t\right)$$

Es importante distinguir entre:
- la velocidad angular (Ω)
- la frecuencia de pulsación (ω)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$